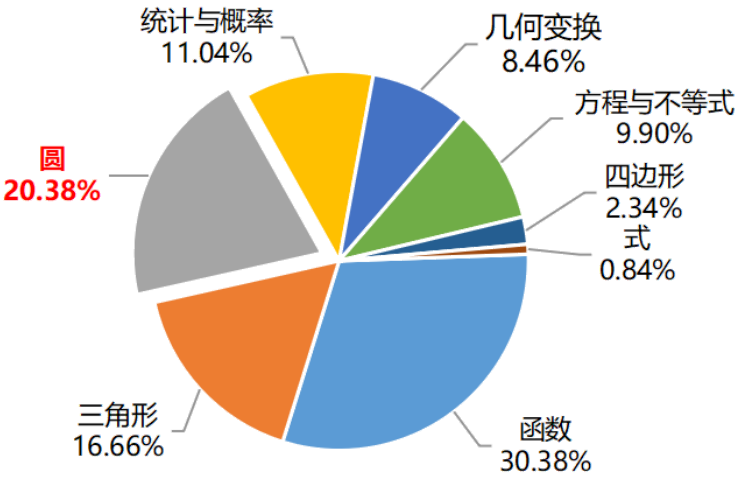


第1讲 圆的三大定理

圆属于人教版教材第二十四章的内容，本模块《圆的综合》，重点包括垂径定理、圆周角定理、切线、圆中的计算等重要知识点，同时也需要学生在理解概念的基础上，研究圆中的最值问题，总结一定的解题思路。

本模块难度适中，其中圆中最值部分难度较大，适用于基础知识的夯实及综合应用，本模块分为圆的三大定理、圆的综合、正多边形和圆与圆中的计算3讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
垂径定理	★★★	高
弧、弦、圆心角关系定理	★★★	高
圆周角定理及圆内接四边形	★★★★	高
直线与圆的位置关系	★★★★	高
圆中最值问题	★★★★★	中
正多边形与圆	★★★	中
圆中的计算	★★★	中

一、垂径定理

垂径定理

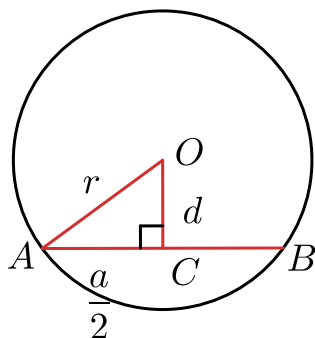
垂径定理：垂直于弦的_____平分这条弦，并且平分弦所对的两条_____。

垂径定理推论：平分弦（_____）的_____垂直于弦，并且平分弦所对的两条_____。

应用垂径定理与推论进行计算时，往往要构造如下图所示的直角三角形，

根据垂径定理与勾股定理有：_____（ r 、 d 、 $\frac{a}{2}$ 的关系），

根据此公式，在 a ， r ， d 三个量中知道任何两个量就可以求出第三个量；当题目给出的已知条件不满足“已知两条边的长度，求第三条边”时，可以通过**设未知数**，列勾股定理方程进行解题。



举个“栗子”

栗子1

1. 下列说法中正确的有（ ）。

- ①垂直平分弦的直线经过圆心；
- ②平分弦的直径一定垂直于弦；
- ③一条直线平分弦，那么这条直线垂直这条弦；
- ④平分弦的直线，必定过圆心；
- ⑤平分弦的直径，平分这条弦所对的弧。

A. 1个

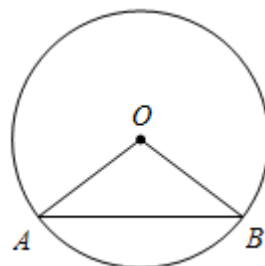
B. 2个

C. 3个

D. 4个

栗子2

2. 如图，已知 $\odot O$ 的半径为5，弦 $AB = 8$ ，则 $\odot O$ 上到弦 AB 所在直线的距离为2的点有（ ）。



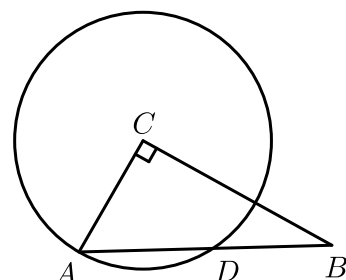
A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

3. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，以点 C 为圆心， CA 为半径的圆与 AB 交于点 D ，则 AD 的长为（ ）。



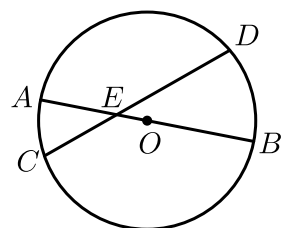
A. $\frac{18}{5}$

B. $\frac{5}{2}$

C. $\frac{24}{5}$

D. $\frac{9}{5}$

4. 如图， $\odot O$ 的直径 AB 和弦 CD 相交于 E ，若 $AE = 2\text{cm}$ ， $BE = 6\text{cm}$ ， $\angle CEA = 30^\circ$ ，求 CD 得长。

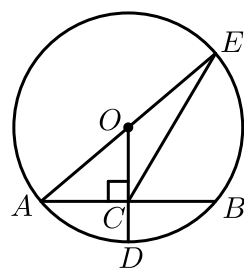


栗子3

5. 若小唐同学掷出的铅球在场地上砸出一个直径约为 10cm 、深约为 2cm 的小坑，则该铅球的直径约为 _____ cm 。

栗子4

6. 如图， $\odot O$ 的半径 $OD \perp$ 弦 AB 于点 C ，连接 AO 并延长交 $\odot O$ 于点 E ，连接 EC 。若 $AB = 8$ ， $CD = 2$ ，求 EC 的长。



栗子5

7. 已知 $\odot O$ 的直径 $CD = 10\text{cm}$ ， AB 是 $\odot O$ 的弦， $AB \perp CD$ ，垂足为 M ，且 $AB = 8\text{cm}$ ，则 AC 的长为（ ）。

A. $2\sqrt{5}\text{cm}$

B. $4\sqrt{5}\text{cm}$

C. $2\sqrt{5}\text{cm}$ 或 $4\sqrt{5}\text{cm}$

D. $2\sqrt{3}\text{cm}$ 或 $4\sqrt{3}\text{cm}$

8. $\odot O$ 的半径为 10cm ，两平行弦 AC ， BD 的长分别为 12cm ， 16cm ，则两弦间的距离是（ ）。

A. 2cm

B. 14cm

C. 6cm 或 8cm

D. 2cm 或 14cm

9. 已知 $\odot O$ 的直径 $CD = 4$ ， AB 是 $\odot O$ 的弦， $AB \perp CD$ ，垂足为 M ，且 $AB = 2\sqrt{3}$ ，则 $\angle ACD$ 等于（ ）.
- A. 30° B. 60° C. 30° 或 60° D. 45° 或 60°

二、弧、弦、圆心角关系定理

弧、弦、圆心角关系定理

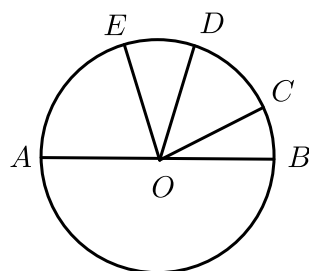
在____圆或____圆中，相等的圆心角所对的____相等，所对的____也相等.

在____圆或____圆中，如果两条弧相等，那么它们所对的____相等，所对的____相等.

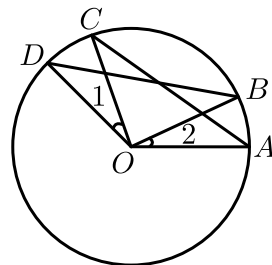
在____圆或____圆中，如果两条弦相等，那么它们所对的____相等，所对的____和____分别相等.

栗子6

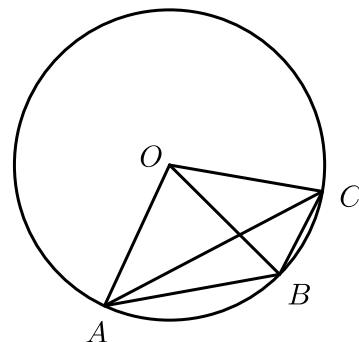
10. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弧 $BC =$ 弧 $CD =$ 弧 DE ， $\angle AOE = 72^\circ$ ，则 $\angle COD$ 的大小 = _____（度）.



11. 如图，已知 A, B, C, D 是 $\odot O$ 上的点， $\angle 1 = \angle 2$ ，则下列结论中正确的有_____.（写出序号）①弧 $AB =$ 弧 CD ；②弧 $BD =$ 弧 AC ；③ $AC = BD$ ；④ $\angle BOD = \angle AOC$.



12. 如图， A, B, C 是 $\odot O$ 上三个点， $\angle AOB = 2\angle BOC$ ，则下列说法中正确的是（ ）.



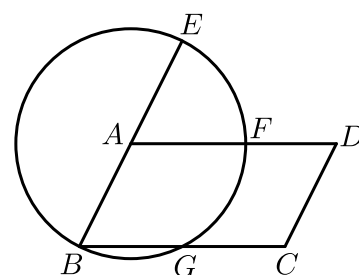
A. $\angle OBA = \angle OCA$

B. 四边形 $OABC$ 内接于 $\odot O$

C. $AB = 2BC$

D. $\angle OBA + \angle BOC = 90^\circ$

13. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中，以 A 为圆心， AB 为半径的圆分别交 AD 、 BC 于点 F 、 G ，交 BA 的延长线于点 E ，求证： $\widehat{EF} = \widehat{FG}$ 。



三、圆周角定理及圆内接四边形

圆周角定理

圆周角定理：一条弧所对的_____等于它所对的_____的一半。

圆周角定理推论

_____弧或_____弧所对的圆周角_____。

半圆（或直径）所对的圆周角是_____；
_____的圆周角所对的弦是_____。

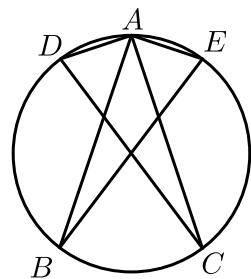
圆内接四边形

圆内接多边形（多边形的外接圆）：如果一个多边形的_____顶点都在同一个圆上，这个多边形叫做_____，这个圆叫做这个多边形的_____。

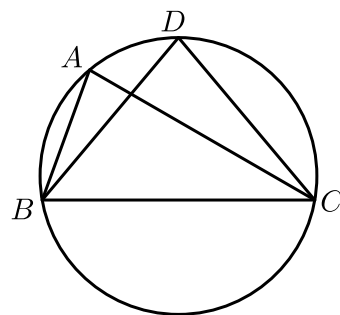
圆内接四边形性质：圆内接四边形的_____，并且任何一个外角都等于它的_____。

栗子7

14. 如图， $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABE$ 都内接于同一个圆，则 $\angle ADC + \angle AEB + \angle BAC =$ _____。



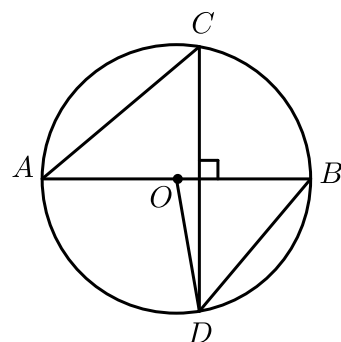
15. 如图， A, B, C 三点在已知的圆上，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 70^\circ$ ， $\angle ACB = 30^\circ$ ， D 是 $\widehat{BAC}$ 的中点，连接 DB, DC ，则 $\angle DBC$ 的度数为（ ）。



- A. 30° B. 45° C. 50° D. 70°

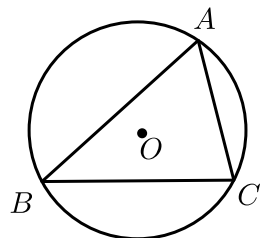
栗子8

16. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ ， $\angle CAB = 40^\circ$ ，则 $\angle BOD$ 的度数等于（ ）。

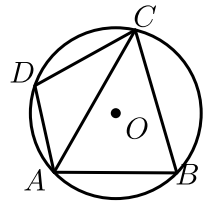


- A. 80° B. 50° C. 70° D. 60°

17. 如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， $\angle A = 60^\circ$ ， $BC = 6\sqrt{3}$ ，则 $\odot O$ 的半径是 _____。



18. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于半径为6的 $\odot O$ 中，连接 AC ，若 $AB = CD$ ， $\angle ACB = 45^\circ$ ， $\angle ACD = \frac{1}{2} \angle BAC$ ，则 BC 的长度为（ ）。



A. $6\sqrt{3}$

B. $6\sqrt{2}$

C. $9\sqrt{3}$

D. $9\sqrt{2}$

栗子9

19. 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, CD 是 $\odot O$ 的弦, 连接 BD .

(1) 如图1, 连接 OC , AD . 若 $\angle ADC = 56^\circ$, 求 $\angle CDB$ 及 $\angle COB$ 的大小.

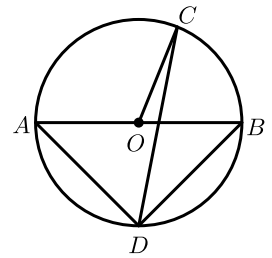


图1

(2) 如图2, 过点 C 作 DB 的垂线, 交 DB 的延长线于点 E , 连接 OD . 若 $\angle ABD = 2\angle CDB$, $\angle ODC = 20^\circ$, 求 $\angle DCE$ 的大小.

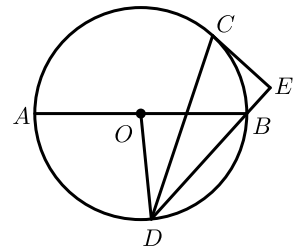
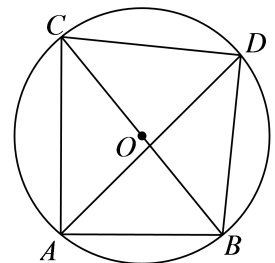


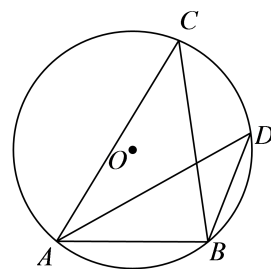
图2

20. 已知 $\odot O$ 直径为 10, 点 A , 点 B , 点 C 在 $\odot O$ 上, $\angle CAB$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D .

(1) 如图①, 若 BC 为 $\odot O$ 的直径, 求 BD , CD 的长.

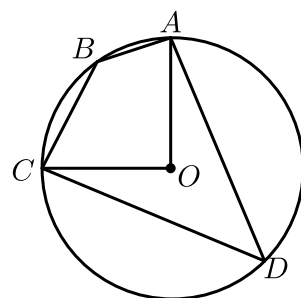


(2) 如图②, 若 $\angle CAB = 60^\circ$, 求 BD , BC 的长.



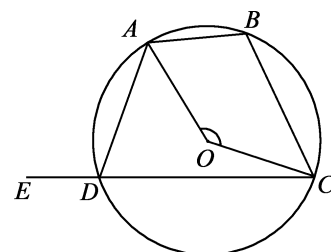
栗子10

21. 如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形， $\angle B = 135^\circ$ ，则 $\angle AOC$ 的度数为（ ）。



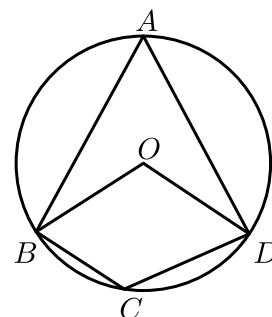
- A. 60° B. 90° C. 100° D. 120°

22. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ， E 为 CD 延长线上一点，若 $\angle ADE = 110^\circ$ ，则 $\angle AOC$ 的度数是（ ）。



- A. 70° B. 110° C. 140° D. 160°

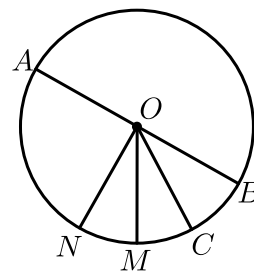
23. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，连接 OB ， OD 。若 $\angle BOD = \angle BCD$ ，则 $\angle BAD$ 的度数为（ ）。



- A. 30° B. 45° C. 60° D. 120°

24. 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径。

(1) 如图①， $\widehat{BC} = \widehat{CM} = \widehat{MN}$ ， $\angle MON = 35^\circ$ ，求 $\angle AON$ 的大小。



图①

(2) 如图② , E, F 是 $\odot O$ 上的两个点 , $AD \perp EF$ 于点 D , 若 $\angle DAE = 20^\circ$, 求 $\angle BAF$ 的大小 .

